УДК 517.9

© **А. В. Калинин**

ОЦЕНКИ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В формулировках широкого класса задач математической физики (например, задачи гидродинамики, электромагнитной теории, теории упругости) присутствуют дифференциальные операции векторного анализа. В обширной математической литературе, посвященной таким задачам, в частности, детально изучаются свойства классов функций $\vec{u} : \Omega \to R^3$ ($\Omega \subset R^3$ — открытое подмножество), для которых $\mathrm{rot}\vec{u} \in L_p(\Omega)$, $\mathrm{div}\vec{u} \in L_q(\Omega)$ и оценки норм $||\vec{u}||$ в различных функциональных пространствах через $||\mathrm{rot}\vec{u}||_{L_p}$ и $||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_q}$. В списке литературы [1–6] приведены лишь некоторые из основополагающих работ в этом направлении.

Однако, во многих прикладных задачах, связанных прежде всего с изучением физических явлений в неоднородных средах, естественно возникает необходимость изучения классов функций $\vec{u} : \Omega \to R^3$, для которых $\mathrm{rot}\vec{u} \in L_p(\Omega)$, $\mathrm{div}\mu\vec{u} \in L_q(\Omega)$, где μ — некоторый оператор или, в частном случае, коэффициент, не обладающий достаточной гладкостью. В этом случае нельзя говорить о включении функции $\vec{u}$ в пространства Соболева. Исследование таких задач проводится, как правило, в предположении кусочной гладкости коэффицинентов с дополнительными условиями согласования на границах раздела сред [5].

Один из возможных подходов исследования таких задач предложен в работах [7,8] и связан с изучением оценок скалярных произведений $\int\limits_\Omega \vec{u} \cdot \vec{v} dx$ через $||\mathrm{rot}\vec{u}||_{L_p}$ и $||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_q}$.

Для $1 \leqslant p, q < \infty$ определим функциональные пространства

$$H_p(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in L_p(\Omega) : \mathrm{rot}\, \vec{u} \in L_p(\Omega)\},$$

$$H_q(\mathrm{div};\Omega) = \{\vec{u} \in L_q(\Omega) : \mathrm{div}\, \vec{u} \in L_q(\Omega)\}.$$

$H^0_p(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H^0_q(\mathrm{div};\Omega)$ — замыкания пространства пробных функций $D(\Omega)$ в пространствах $H_p(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H_q(\mathrm{div};\Omega)$ соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbf{R^3}$, звездное относительно некоторой точки, $p > \frac{3}{2}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда существуют положительные постоянные C_1, C_2, зависящие только от области Ω и p, что*

$$\left| \int\limits_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx \right| \leqslant C_1 (||\vec{u}||_{L_q} \cdot ||rot\, \vec{v}||_{L_p} + ||\vec{v}||_{L_p} \cdot ||div\, \vec{u}||_{L_q})$$

при всех $\vec{u} \in H_q(div;\Omega)$, $\vec{v} \in H^0_p(rot;\Omega)$ и

$$\left| \int\limits_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx \right| \leqslant C_2 (||\vec{u}||_{L_q} \cdot ||rot\, \vec{v}||_{L_p} + ||\vec{v}||_{L_p} \cdot ||div\, \vec{u}||_{L_q} + ||rot \vec{v}||_{L_p} \cdot ||div\, \vec{u}||_{L_q})$$

при всех $\vec{u} \in H^0_q(div;\Omega)$, $\vec{v} \in H_p(rot;\Omega)$.

Доказательства этих неравенств основано на специальных представлениях векторных полей [7,8].

В качестве примера применения приведенных оценок скалярных произведений рассматриваются краевые задачи для стационарной системы уравнений Максвелла в неоднородных средах, записываемой в гауссовой системе единиц в следующем виде

$$\mathrm{rot}\vec{H}(x) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x),$$
$$\mathrm{div}\vec{B}(x) = 0,$$
$$\mathrm{rot}\vec{E}(x) = 0,$$
$$\mathrm{div}\vec{D}(x) = 4\pi\rho(x),$$

где

$$\vec{J}(x) = \sigma(x)(\vec{E}(x) + \vec{E}^{\text{ст.}}(x)),$$
$$\vec{B}(x) = \mu(x)\vec{H}(x),$$
$$\vec{D}(x) = \varepsilon(x)\vec{E}(x).$$

Здесь μ, σ, ε, $\vec{E}^{\text{ст.}}$ — заданные функции, $\vec{H}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{J}, \rho$ — искомые функции.

Система уравнений Максвелла изучается при следующих вариантах граничных условий

$$\vec{H}_\tau(x) = 0,\ x \in \Gamma$$

и

$$\vec{B}_n(x) = 0,\ \vec{E}_\tau(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

где Γ — граница области Ω, $\vec{u}_\tau$ и $\vec{u}_n$ — тангенциальные и нормальные составляющие вектора $\vec{u}$ на границе Γ.

Сформулированные в работе оценки для скалярных произведений векторных полей позволяют при весьма общих условиях на коэффициенты (например, $\mu : \text{Ł}_2(\Omega) \to \text{Ł}_2(\Omega)$, $\sigma : \text{Ł}_2(\Omega) \to \text{Ł}_2(\Omega)$ и $\varepsilon : \text{Ł}_2(\Omega) \to \text{Ł}_2(\Omega)$ — симметричные положительно определенные операторы) получить теоремы об однозначной разрешимости соответствующих краевых задач, используя простые соображения, основанные на прменении теоремы Лакса–Мильграма.

В работе также рассматриваются аналогичные оценки для скалярных произведений в неограниченных областях в соответствующих весовых пространствах и приводятся примеры их применения для изучения различных задач для системы уравнений Максвелла.

Список литературы

1. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
2. Ладыженская О.А. Математические задачи вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
3. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства векторфункций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР. 1960. Т. LIX. С. 5-36.
4. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Пространства Соболева соленаидальных векторных полей // Сиб. матем журнал. 1981. Т. 22, № 3. С. 91-118.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
6. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса / Теория и численный анализ. М.: Наука, 1991.
7. Калинин А.В. Некоторые оценки теории векторных полей // Вестник ННГУ. Серия математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Т. 20, № 1. С. 32-38.
8. Калинин А.В., Калинкина А.А. L_p - оценки векторных полей // Известия вузов. Математика. 2004. № 3. С. 26–35.

Калинин Алексей Вячеславович
Нижегородский государственный ун-т,
Россия, Нижний Новгород
e-mail: avk@mm.unn.ru